Zastosowania rachunku różniczkowego

Konrad Fyda, Konrad Hałaszko, Maciej Kopiec
I Liceum Ogólnokształcące im. 14 Pułku Powstańców Śląskich w Wodzisławiu Śląskim

opiekun naukowy: dr inż. Piotr Słanina
Politechnika Śląska, Katedra Matematyki

współpraca: mgr Jerzy Herud
I Liceum Ogólnokształcące im. 14 Pułku Powstańców Śląskich w Wodzisławiu Śląskim

Projekt powstał w ramach programu
Inicjatywa Doskonałości - Uczelnia Badawcza

1 Wspowadzenie

1.1 Wstęp

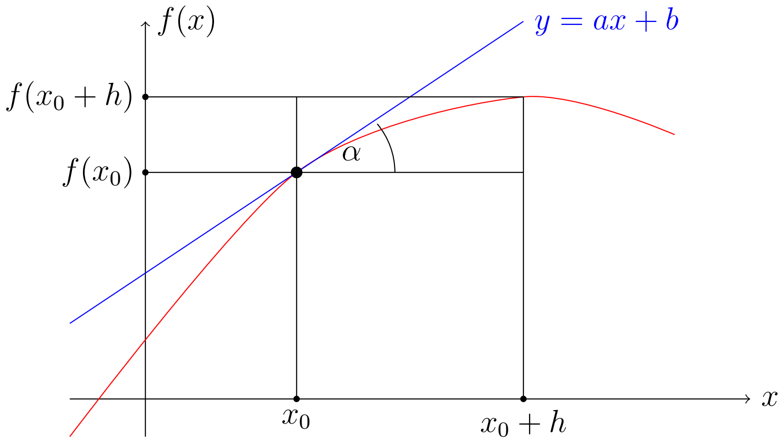
Rachunek różniczkowy jest fundamentalną dziedziną analizy matematycznej. Jego istotą jest istnienie i własności pewnych granic, zależnych od określonej funkcji rzeczywistej i jej argumentów.

Definicja. Niech funkcja $f(x)$ będzie określona na pewnym otwartym przedziale, zawierającym punkt x_0. Pochodną funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 nazywamy granicę właściwą:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Pochodną $f'(x)$ funkcji $f(x)$ nazywamy funkcję, przyporządkowującą każdemu punktowi dziedziny jego pochodną w tym punkcie.

1.2 Interpretacja geometryczna pochodnej:



Pochodna funkcji $f(x)$ (czerwony kolor) w punkcie x_0 jest równa współczynnikowi kierunkowemu prostej, stycznej do wykresu w tym punkcie oraz także tangensowi kąta α zawartemu pomiędzy osią OX a tą prostą styczną:

$$f'(x_0) = a = tg\alpha$$

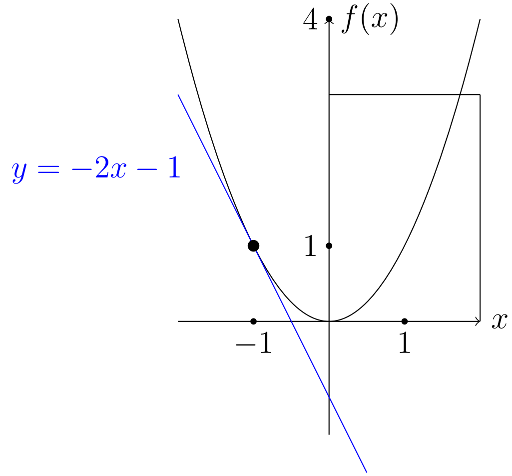
Wartość pochodnej funkcji w punkcie opisuje nam, jak szybki jest względny wzrost lub spadek wartości funkcji w pobliżu tego punktu.

1.3 Przykład pochodnej funkcji w punkcie

Dla $f(x) = x^2$ oraz $x_0 = -1$ mamy

$$f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \cdots$$

Dokończyć obliczenia powyżej - wynik ma być -2



1.4 Przykład pochodnej funkcji

Niech $f(x) = \sin x$. Wtedy

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\cos(\frac{2x+h}{2})\cos(\frac{h}{2})}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\cos(\frac{2x+h}{2}) \cdot \frac{\cos(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} \right) = \cos x.$$

1.5 Wzory na pochodne podstawowych funkcji

Do szybkiego obliczania pochodnych podstawowych funkcji istnieją wzory umieszczone w Tabeli **??**. Można je wyprowadzić z definicji pochodnej.

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1} dla $n \neq 0$
x^2	$2x$
x	1
1	0
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x)$	$f'(x)$
a^x	$a^x \ln a$ $(a > 0 \wedge a \neq 1)$
e^x	e^x
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$ $(a > 0 \wedge a \neq 1)$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Tablica 1: Pochodne podstawowych funkcji

1.6 Wzory na obliczanie pochodnych funkcji złożonych

Niech $a \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą funkcjami róniczkowalnymi. Wtedy różniczkowalne są funkcje $a \cdot f(x)$, $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ (jeżeli $g(x)$ nie zeruje się w żadnym punkcie swej dziedziny) oraz $f(g(x))$. Mamy wtedy nastepujące wzory:

$$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x),$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x),$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x),$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)},$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Przykład. Jeżeli

$$f(x) = \frac{\operatorname{arcctg}^8 \ln x}{e^x \sqrt{\sin x}},$$

to

$$f'(x) = \frac{8 \operatorname{arcctg}^7 \ln x \frac{-1}{1+\ln^2 x} \frac{1}{x} \cdot e^x \sqrt{\sin x} - \operatorname{arcctg}^8 \ln x \cdot \left(e^x \sqrt{\sin x} + e^x \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cos x\right)}{e^{2x} \sin x}.$$

Dalej przedstawimy wybrane zastosowania w matematyce:

2 Zastosowania w matematyce

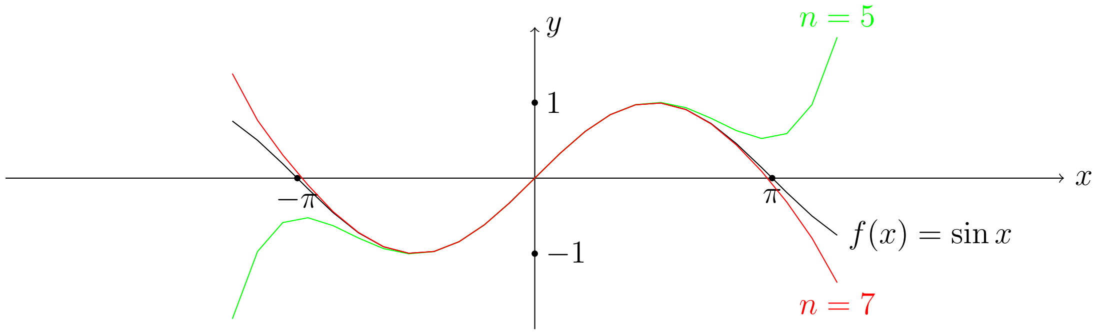
2.1 Wzór Taylora

Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ posiada w przedziale $\langle a, b\rangle$ wszystkie pochodne do rzędu $n+1$-go ciągłe. Wtedy dla każdego $x_0 \in (a, b)$:

$$f(x_0 + x) = f(x_0) + \frac{x}{1!}f'(x_0) + \frac{x^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + R_n(x_0, x),$$

gdzie

$$\lim_{x\to 0} \frac{R_n(x_0, x)}{x^n} = 0.$$



2.2 Przykład wykorzystania wzoru Taylora

Niech $f(x) = \sin x$. Wtedy:

$$f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, f'''(x) = -\cos x, f''''(x) = \sin x, ...$$

Zatem dla $x - 0$,

$$\sin x \approx \frac{f(x_0) \cdot x}{0!} + \frac{f'(x_0) \cdot x^2}{1!} + \frac{f''(x_0) \cdot x^3}{2!} + \frac{f'''(x_0) \cdot x^4}{3!} + ...,$$

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} - \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n)!} + \cdots$$

Korzystając z tego wzoru, można obliczyć przybliżoną wartość $\sin 0.2$. Dla $x_0 = 0$ i $x = 0.2$:

$$\sin 0.2 \approx 0 + \frac{0.2}{1} \cdot 1 + \frac{(0.2)^2}{2} \cdot 0 + \frac{(0.2)^3}{6} \cdot (-1) + \frac{(0.2)^4}{24} \cdot 0$$

$$\sin 0.2 \approx 0 + 0,2 + 0 - 0,001333 + 0 = 0,198667$$

Porównując z faktyczną wartością $\sin 0.2 \approx 0,19866933$, mamy wynik z dokładnością do pięciu miejsc po przecinku.

2.3 Obliczanie granic ilorazowych - Twierdzenie de l'Hospitala

Do obliczania wielu granic ilorazów najwygodniejszym sposobem jest Twierdzenie de l'Hospitala; jeżeli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są różniczkowalne w pewnym otoczeniu x_0 (będącym liczbą lub nieskończonością, albo $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ lub $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$, to:

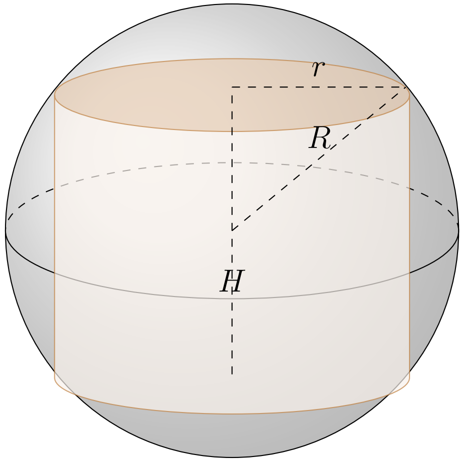
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2.4 Przykład wykorzystania Twierdzenie de l'Hospitala

Rozwiązać przykład zasugerowany przeze mnie

2.5 Zastosowanie w geometrii

Rozwiązać zasugerowany przeze mnie przykład z walcem wpisanym w kulę



$$r = \sqrt{R^2 - \frac{H^2}{4}}$$

3 Zastosowania w fizyce

3.1 Droga, prędkość i pochodna

Fundamentalne wielkości fizyczne są ze sobą powiązane pochodnymi:
Prędkość jest pochodną drogi po czasie, a przyspieszenie pochodną prędkości po czasie.
Przykład. Niech $A > 0$. Jeżeli współrzędne punktu na płaszczyźnie są zależne od czasu t i są równe $(A\cos^3 t, A\sin^3 t)$, to wektor jego prędkości jest równy

$$\vec{V}(t) = (-3A\cos^2 t \sin t, 3A\sin^2 t \cos t),$$

a przyspieszenie

$$\vec{a}(t) = (-3A\cos t(\cos^2 t - 2\sin^2 t), 3A\sin t(2\cos^2 t - \sin^2 t)).$$

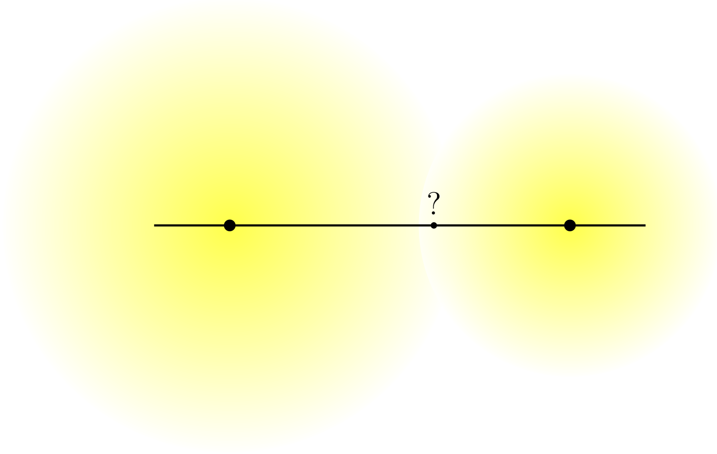
Wtedy

$$|V(t)| = 3A|\cos t \sin t|,$$

$$|a(t)| = 3A\sqrt{sin^6 t + \cos^6 t}.$$

3.2 Jasność

Rozwiązać zasugerowany przeze mnie przykład z dwoma źródłami światła



3.3 Energia

Kropla wody o masie początkowej m_0 zaczyna spadać pod wpływem siły ciężkości (pominiemy opór powietrza) i paruje jednostajnie. Niech ubytek jej masy w ciągu sekundy wynosi d. Obliczymy maksymalną energię kinetyczną kropli.

Mamy $V(t) = gt$, $m(t) = m_0 - dt$. Niech $t > 0$. Dalej,

$$E(t) = \frac{mV^2}{2} = \frac{(m_0 - dt)(gt)^2}{2} = \frac{g^2}{2}(m_0 t^2 - dt^3).$$

$$E'(t) = \frac{g^2}{2}(2m_0 t - 3dt^2).$$

$E'(t) = 0$ dla $t = \frac{2m_0}{3d}$ i w tym czasie energia kinetyczna kropli będzie największa i wyniesie $E(\frac{2m_0}{3d}) = \frac{2m_0^3 g^2}{27d^2}$.

4 Podsumowanie

Przedstawione przykłady dotyczyły głównie zastosowań matematycznych.

- Aproksymacja funkcji, różnych wartości (Wzór Taylora).
- Wyznaczanie mniej elementarnych granic (Twierdzenie de l'Hospitala).
- Optymalizacja (wyznaczanie najmniejszych i największych wartości funkcji) w zadaniach z wielu dziedzin: geometrii, fizyki itp.

Zastosowania rachunku różniczkowego możemy bardziej precyzyjnie opisać, jeżeli spojrzymy na równania różniczkowe. W ty przypadku są to między innymi:

- Fizyka, Chemia - opisanie bezpośrednich zależności i wzorów.
- Biologia - umożliwienie modelowania różnych środowisk przyrodniczych.

To już jest temat na kolejne opracowanie.